ECOLE PREPARATOIRE EN SCIENCES ECONOMIQUES, COMMERCIALES ET SCIENCES DE GESTION

Niveau : 1ère Année
Sections : 1 et 2
Année Académique : 2011/2012

Module : Probabilité 1
Enseignant : KHERRI Abdenacer
Site web : www.proba-ep.jimdo.com

Support pédagogique de cours :
Cours N° 01
" Rappel sur la théorie des ensembles "

Plan du cours :

1. Introduction.
2. Définitions préliminaire.
3. Ensemble, sous-ensemble et élément.
4. Opérations sur les ensembles.
   4.1. L'union (la réunion).
   4.2. L'intersection.
   4.3. L'inclusion.
   4.4. La complémentarité.
   4.5. La différence.
5. Diagrammes de Venn.
6. Lois de l'algèbre des ensembles.

1. Introduction :

Ce premier cours est consacré aux notions élémentaires et aux concepts généraux de la théorie des ensembles, dont on a besoin pour une introduction à la théorie du calcul des probabilités.

2. Définition préliminaire :

La théorie des probabilités utilise un langage emprunte à la théorie des ensembles. Il sera nécessaire de définir les éléments de ce langage avant d'entreprendre notre étude sur les probabilités.

- **Ensemble :** toute liste ou toute collection d'objet bien défini.
- **Sous-ensemble :** une partie de l'ensemble.
- **Elément :** les objets qui composent un ensemble.

3. **Ensemble, sous-ensemble et Elément** :

On peut définir d'une autre manière un ensemble comme la réunion dans une même entité de certains objets bien déterminés. On appelle ces objets les éléments de l'ensemble.

- Pour signifier que **x** est un élément d'un ensemble **E**, on écrit $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$, si **x** n'est pas un élément de **E**, on écrit $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{E}$.
- Soit **x** et **y** deux éléments de **E** ; on note $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ si ces éléments sont égaux, et on note $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ s'ils sont différents.
- Un ensemble **E** est dit **fini** lorsque le nombre d'éléments qui le composent est un entier naturel, dans ce cas, le nombre d'éléments est appelé le **cardinal de l'ensemble** et on le note **card (E)**, un ensemble qui n'est pas fini est dit **infini**.
- L'**ensemble vide** est un ensemble qui ne contient aucun élément et on le note **Ø**, par convention **card(Ø) = 0**.

<u>Quelques exemples d'ensembles numériques</u> :

$\mathbb{N}$: Ensemble des nombres naturels ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$).
$\mathbb{Z}$: Ensemble des nombres entiers ($\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$).
$\mathbb{Q}$: Ensemble des nombres rationnels ($\mathbb{Q} = \left\{\ldots, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \ldots\right\}$).
$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels ($\sqrt{2} \in \mathbb{R},\ \pi \in \mathbb{R}$).
$\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes ($1 + 2i \in \mathbb{C}$).

<u>Exemples</u> : [Ensemble, Sous-ensemble et Elément]

<u>Exemple (01)</u> : [Ensembles identiques]

Parmi les ensembles : {r, s, t}, {t, s, r}, {s, r, t}, {t, r, s} quels sont ceux qui sont identiques ?

<u>Exemple (02)</u> : [Ensemble vide]

Déterminer si les ensembles suivants sont vide :

1. $X = \{x: x^2 = 9, 2x = 4\}$
2. $Y = \{x: x \neq x\}$
3. $Z = \{x: x + 8 = 8\}$

<u>Exemple (03)</u> : [Sous-ensemble]

Soit $V = \{d\},\ W = \{c, d\},\ X = \{a, b, c\},\ Y = \{a, b\},\ Z = \{a, b, d\}$

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

$Y \subset X, \quad W \neq Z, \quad Z \supset V, \quad V \subset X, \quad X = W, \quad W \subset Y$

Exemple (04) : [Ensembles finis et ensembles infinis]

Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui sont finis ?

1. Les mois de l'année.
2. {1, 2,3, …, 99, 100}.
3. Le nombre des habitants de la terre.
4. L'ensemble des nombres rationnels Q.
5. L'ensemble des nombres réels R.

4. Opérations sur les ensembles :

Si l'on considère que **A** et **B** sont deux ensembles, il est possible d'effectuer des opérations sur ces ensembles.

- **L'union (la réunion)** :
  Soit **A** et **B** deux ensembles, l'union de **A** et **B** que l'on note **A ∪ B** est l'ensemble des éléments qui appartiennent à **A** ou à **B**.
  $\boldsymbol{A \cup B = \{x : x \in A \ \ ou \ \ x \in B\}}$
  Le terme "**ou**" est employé ici au sens de **et/ou**.

- **L'intersection** :

  Soit **A** et **B** deux ensembles, l'intersection de **A** et **B** que l'on note **A ∩ B** est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à **A** et à **B**.
  $\boldsymbol{A \cup B = \{x : x \in A \ \ et \ \ x \in B\}}$

- **L'inclusion** :

  Soit **A** et **B** deux ensembles, l'inclusion de **B** dans **A** que l'on note **B ⊂ A** signifie que l'ensemble **B** est un sous-ensemble de **A**.

- **La complémentarité** :

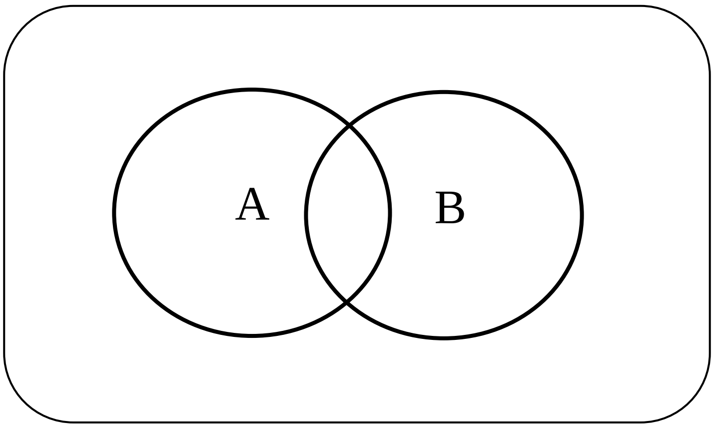
  Soit **A** un ensemble dans l'univers **U**, on appelle complémentaire de **A** par apport à l'univers **U**, noté $\boldsymbol{C_U(A)}$, les éléments de **U** qui n'appartiennent pas à l'ensemble **A**.
  $\boldsymbol{C_U(A) = \{x : x \in U \ et \ \ x \notin A\}}$

- **La différence** :

  La différence entre les deux ensembles **A** et **B** ou le complémentaire de **B** par apport à **A**, que l'on note $\boldsymbol{C_A(B)}$, les éléments de **A** qui n'appartiennent pas à **B**.
  $\boldsymbol{C_A(B) = \{x : x \in A \ et \ \ x \notin B\}}$

5. **Diagrammes de Venn** :

Les diagrammes suivants qu'on appelle diagrammes de Venn illustrent les opérations précédentes sur les ensembles.



Sur ce diagramme on peut représenté les ensembles suivants : $\boldsymbol{A \cup B}$, $\boldsymbol{A \cap B}$, $\boldsymbol{C_A B}$ et $\boldsymbol{C_U A}$

6. **Lois de l'algèbre des ensembles** :

Les ensembles sur lesquels on effectue les opérations précédentes satisfont des lois ou identités diverses que l'on peut résumer dans le tableau suivant :

Lois de l'algèbre des ensembles	
Loi idempotente	▪ $A \cup A = A$ ▪ $A \cap A = A$
Loi associative	▪ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ▪ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Loi commutative	▪ $A \cup B = B \cup A$ ▪ $A \cap B = B \cap A$
Loi de distributivité	▪ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ▪ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Loi d'identité	▪ $A \cup \emptyset = A$ ▪ $A \cup U = U$ ▪ $A \cap \emptyset = \emptyset$ ▪ $A \cap U = A$
Loi de complémentarité	▪ $A \cup C_U A = U$ ▪ $CCA = A$ ▪ $A \cap C_U A = \emptyset$ ▪ $CU = \emptyset$ ▪ $C\emptyset = U$
Loi de Morgan	▪ $C(A \cup B) = CA \cap CB$ ▪ $C(A \cap B) = CA \cup CB$

Exemples : [Opérations sur les ensembles]

Exemple (01) :

Soit $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$

Determiner CA, $A \cap C$, $C(A \cap C)$, $A \cup B$, $C_B C$

Exemple (02) :

Soit $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, d\}$, $B = \{b, d, e\}$

Determiner $A \cup B$, $B \cap A$, CB, $C_A B$, $CA \cap B$, $A \cup CB$, $A \cap CB$, $C(A \cap B)$, $C(A \cup B)$