ECOLE PREPARATOIRE EN SCIENCES ECONOMIQUES, COMMERCIALES ET SCIENCES DE GESTION

Niveau : $1^{ère}$ Année
Sections : 1 et 2
Année Académique : 2011/2012

Module : Probabilités 1
Enseignant : KHERRI Abdenacer
Site web : www.proba-ep.jimdo.com

Support pédagogique de cours :
Cours N° 04
" La probabilité conditionnelle et le théorème de Bayes "

Plan du cours :

1. Introduction.
2. Définition de la probabilité conditionnelle.
3. Propriétés de la probabilité conditionnelle.
4. La loi de la multiplication.
   - Loi de la multiplication pour deux évènements.
   - Loi de la multiplication pour trois évènements.
   - Loi de la multiplication pour *k* évènements.
5. Théorème de Bayes.
6. Indépendance des évènements.
   - Indépendance de deux évènements.
   - Indépendance de plusieurs évènements.
7. Formules de calcul de la probabilité conditionnelle.

1. Introduction :

Jusqu'ici, l'évaluation de la probabilité d'un événement a été faite par rapport à l'univers. Il arrive fréquemment, pour ainsi dire presque toujours, que tenant compte d'une information nouvelle, la probabilité d'un événement est modifiée. Dans un tel cas, le calcul de la probabilité de l'événement sera fait par rapport à un espace réduit.

Supposons que nous attendions le résultat d'une épreuve et que nous connaissions la probabilité **P(A)** de l'évènement attendu **A**. Si, l'épreuve s'étant déroulée, nous recevons une information supplémentaire, par exemple que l'évènement **B** s'est produit, ce renseignement va en général modifier la probabilité de réalisation de l'évènement **A**.

2. **Définition de la probabilité conditionnelle** :

Soient **A** et **B** deux évènements d'un univers $\mathbf{\Omega}$. Si $\mathbf{P(B) \neq 0}$, on appelle **probabilité conditionnelle** de **A** par **B** le nombre noté $\mathbf{P(A\backslash B)}$, ce qui se lit " *la probabilité de **A** sachant que **B** s'est réalisé* " est tel que :

$$\mathbf{P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Exemples :

Exemple (01) : [Probabilité conditionnelle]

On lance deux dés, quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieur à **6** sachant que l'un des deux dés indique un **2** ?

Exemple (02) : [Probabilité conditionnelle]

Un vendeur de motoneige a classifie ses ventes de l'année courante d'après la table suivante :

	Comptant	A crédit
Neuve	10	23
Usagées	40	57

Calculer la probabilité qu'un acheteur choisi au hasard dans les dossiers du vendeur soit :
a) un acheteur d'une motoneige neuve.
b) un acheteur d'une motoneige a crédit.
c) un acheteur d'une motoneige neuve étant donne qu'il est un acheteur d'une motoneige à crédit.
d) un acheteur d'une motoneige à crédit s'il est un acheteur d'une motoneige neuve.

3. <u>Propriétés de la probabilité conditionnelle</u> :

Soient **A** et **B** et **C** des évènements d'un univers **Ω**. Si $\mathbf{P(C) \neq 0}$, on a :

- $\mathrm{P(A\backslash C) \geq 0}$
- $\mathrm{P(\Omega\backslash C) = 1}$
- $\mathrm{P(A \cup B\backslash C) = P(A\backslash C) + P(B\backslash C)}$ si $\mathrm{A \cap B = 0}$
- $\mathrm{P(A \cup B\backslash C) = P(A\backslash C) + P(B\backslash C) - P(A \cap B\backslash C)}$ si $\mathrm{A \cap B \neq 0}$
- $\mathrm{P(\overline{A}\backslash C) = 1 - P(A\backslash C)}$
- $\mathrm{P(\emptyset\backslash C) = 0}$
- Si $A \subseteq B$ alors $P(A\backslash C) \leq P(B\backslash C)$
- $0 \leq P(A\backslash C) \leq 1$
- $\mathrm{P(A \cap \overline{B}\backslash C) = P(A\backslash C) - P(A \cap B\backslash C)}$

<u>Exemple (03)</u> : [Propriétés de la probabilité conditionnelle]

Soit **A** et **B** deux évènements tels que : $P(A) = \frac{5}{16}$, $P(B) = \frac{9}{16}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

Trouver :

- $P(A\backslash B)$
- $P(\bar{A}\backslash B)$
- $P(B\backslash \bar{A})$
- $P(B\backslash A \cup B)$
- $P(B\backslash B)$
- $P(A \cap B\backslash B)$
- $P(A \cup B\backslash B)$

4. <u>La loi de la multiplication</u> :

- **Loi de la multiplication pour deux évènements :**

En utilisant la définition da la probabilité conditionnelle :

$$\mathbf{P(A\backslash B)} = \frac{\mathbf{P(A\cap B)}}{\mathbf{P(B)}} \quad \textbf{si} \quad \mathbf{P(B) \neq 0}$$

$$\mathbf{P(B\backslash A)} = \frac{\mathbf{P(A\cap B)}}{\mathbf{P(A)}} \quad \textbf{si} \quad \mathbf{P(A) \neq 0}$$

On obtient la ***loi de la multiplication*** par une simple transformation des formules précédentes :

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(B).P(A\backslash B)} \quad \textbf{si} \quad \boldsymbol{P(B) \neq 0}$$

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A).P(B\backslash A)} \quad \textbf{si} \quad \boldsymbol{P(A) \neq 0}$$

Donc pour calculer $\mathbf{P(A \cap B)}$ on peut utiliser les formules suivantes :

1. $\mathrm{P(A \cap B) = P(B).P(A\backslash B)}$ si $P(B) \neq 0$
2. $\mathrm{P(A \cap B) = P(A).P(B\backslash A)}$ si $P(A) \neq 0$
3. $\mathrm{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)}$ par ce que $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

- **Loi de la multiplication pour trois évènements :**

On peut généraliser à plusieurs événements la loi de multiplication. Pour calculer la probabilité d'une suite de 3 événements, on procède de la même façon :

$$\mathbf{P(A \cap B \cap C) = P(B).P(A\backslash B).P(C\backslash A \cap B)} \quad \textbf{si} \quad \boldsymbol{P(A),\ P(A \cap B) \neq 0}$$

- **Loi de la multiplication pour *k* évènements :**

Pour calculer la probabilité d'une suite de ***k*** événements, on procède de la même façon :

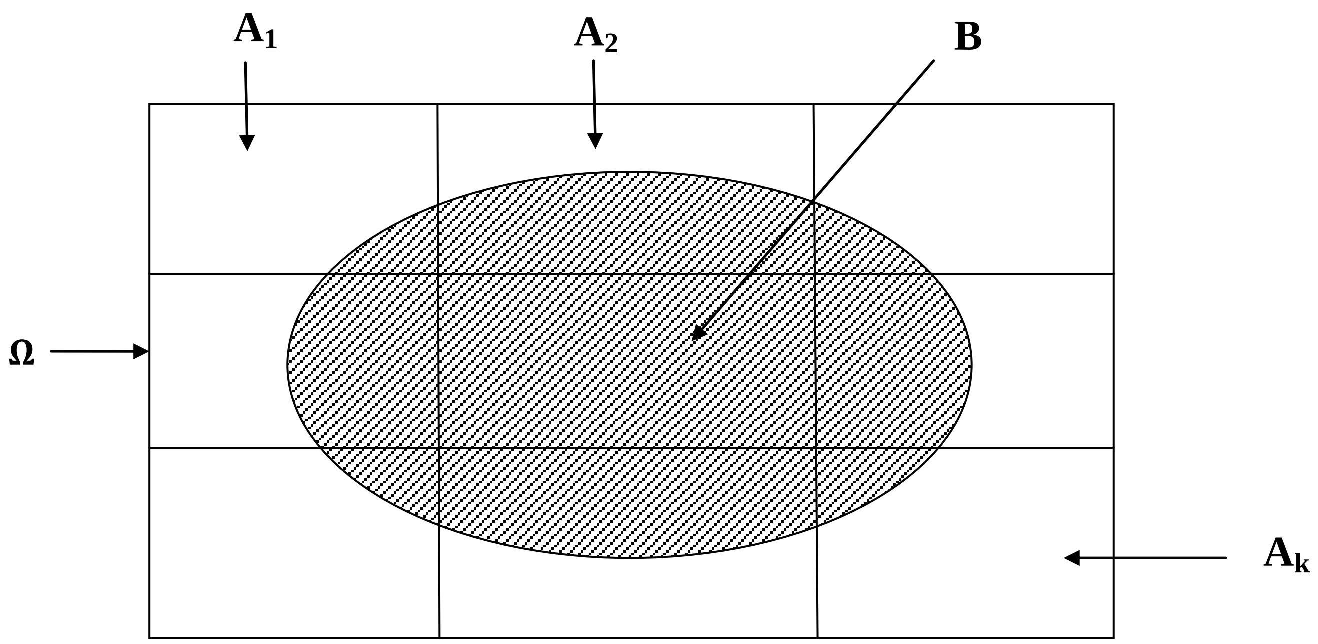
$$\mathbf{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1).P(A_2\backslash A_1).P(A_3\backslash A_1 \cap A_2) \ldots P(A_k\backslash A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)}$$

$$\textbf{si} \quad \boldsymbol{P}\mathbf{(A_1)},\ \boldsymbol{P}\mathbf{(A_1 \cap A_2)}, \ldots,\ \boldsymbol{P}\mathbf{(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \neq 0}$$

5. Théorème de Bayes :

Thomas Bayes (1702-1761) est né à Londres en Angleterre et a développé un théorème qui porte sur le calcul de la probabilité d'un événement basé sur une connaissance a priori, l'application du théorème permet d'établir que la probabilité d'un événement est le résultat conditionnel d'une probabilité connue.

Soit $\mathbf{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k \neq 0}$, une partition de **Ω**, et **B** est un évènement quelconque de **Ω**



Puisque : $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_k \cap B)$ et $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots, A_k \cap B$ sont mutuellement exclusifs, on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_k \cap B)$$

En appliquant la loi de la multiplication, on obtient :

$$P(B) = P(A_1).P(B\backslash A_1) + P(A_2).P(B\backslash A_2) + \cdots + P(A_k).P(B\backslash A_k)$$

De plus, pour $i = 1, 2, 3, \ldots, k$

$$\mathbf{P(A_i\backslash B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i).P(B\backslash A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i).P(B\backslash A_i)}{P(A_1).P(B\backslash A_1) + P(A_2).P(B\backslash A_2) + \cdots + P(A_k).P(B\backslash A_k)}}$$

Donc : **la formule de Bayes** (*<u>théorème de Bayes</u>* *ou* *<u>loi de Bayes</u>*) est la suivante :

$$\mathbf{P(A_i\backslash B) = \frac{P(A_i).P(B\backslash A_i)}{P(A_1).P(B\backslash A_1) + P(A_2).P(B\backslash A_2) + \cdots + P(A_k).P(B\backslash A_k)}}$$

<u>Exemple (04)</u> : [Théorème de Bayes]

Un appareil peut être monté avec des pièces de haute qualité (**40 %** des cas) et avec des pièces ordinaires (**60 %** des cas). Dans le premier cas, sa fiabilité (probabilité de fonctionnement) sur une durée de référence est égale à **0,95**; dans le second, elle est de **0,7**.

L'appareil a été soumis à un essai et s'est avéré fiable (fonctionnement sans défaillance sur la durée de référence).

Déterminer la probabilité que l'appareil soit composé de pièces de haute qualité.

<u>Exemple (05)</u> : [Théorème de Bayes]

Deux usines fabriquent des ampoules, **1 %** des ampoules fabriquées par la première usine et **3 %** des ampoules fabriquées par la seconde usine sont défectueuses. Dans un lot de **1000** ampoules, **600** viennent de la première usine et **400** de la seconde usine.

On tire au hasard une ampoule et celle-ci est défectueuse. Quelle est la probabilité pour que l'ampoule défectueuse provienne de la première usine ?

<u>Exemple (06)</u> : [Théorème de Bayes]

Trois machines **A**, **B**, et **C** produisent respectivement **50 %**, **30 %** et **20 %** du nombre total de pièces fabriquées dans une usine, les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont de **3 %**, **4 %** et **5 %**. Soit **E** l'évènement correspondant à une pièce défectueuse.

1. Si l'en prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité pour que cette pièce soit défectueuse ?
2. Calculer la probabilité pour que cette pièce ait été produite par la machine **A**, c'est-à-dire calculer $\mathbf{P}(\mathbf{A} \backslash \mathbf{E})$.

6. Indépendance des évènements :

Indépendance de deux évènements :

Deux événements **A** et **B** sont indépendants en probabilité si la réalisation de **A** n'influe pas sur la probabilité que **B** soit réalisé ou non.

On dit que deux évènements sont ***indépendants*** si et seulement si : $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

Propriétés :

- Soit A et B deux évènements, $A, B \in \Omega$:
  $A \text{ et } B$ sont indépendants implique :
  $A \text{ et } \bar{B}$ sont indépendants.
  $\bar{A} \text{ et } B$ sont indépendants.
  $\bar{A} \text{ et } \bar{B}$ sont indépendants.
- Tout évènement est indépendant de l'évènement impossible et indépendant de l'évènement certain.

Remarque : ne pas confondre indépendance et disjonction (incompatibilité)

Indépendance de plusieurs évènements :

On dit que les événements $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n}$ sont ***indépendants*** si et seulement si : $\boldsymbol{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times \dots \times P(A_n)}$

Exemple (07) : [Indépendance des évènements]

Le tableau suivant donne la répartition de **150** stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie.

	Tennis	Equitation	Voile
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

On choisit un élève au hasard :

1. Les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?
2. Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?

7. **Formule de calcul de la probabilité conditionnelle** :

Intitulé	Notation	Formule
La loi de multiplication	$P(A \cap B)$	$P(A \cap B) = P(A).P(B\backslash A)$ $P(A \cap B) = P(B).P(A\backslash B)$
Probabilité conditionnelle	$P(A\backslash B)$	$P(A\backslash B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Formule de Bayes	$P(A_i\backslash B)$	$P(A_i\backslash B) = \dfrac{P(A_i).P(B\backslash A_i)}{P(A_1).P(B\backslash A_1) + P(A_2).P(B\backslash A_2) + \cdots + P(A_k).P(B\backslash A_k)}$