# ECOLE PREPARATOIRE EN SCIENCES ECONOMIQUES, COMMERCIALES ET SCIENCES DE GESTION

**Niveau** : 1ère Année
**Sections** : 1 et 2
**Année Académique** : 2011/2012

**Module** : Probabilités 1
**Enseignant** : KHERRI Abdenacer
**Site web** : www.proba-ep.jimdo.com

## Support pédagogique de cours :
## Cours N° 03
## " Introduction au calcul des probabilités "

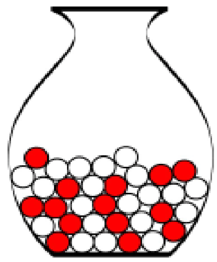
## 1. **Introduction** :

Le calcule des probabilités est la base essentielle pour toute approche de la théorie des probabilités et des statistique, c'est une suite naturelle de la statistique descriptive dans laquelle on introduit de façon empirique  intuitives du langage de probabilité.

La théorie probabiliste est considérée comme une science dans l'objet consiste à étudier des phénomènes qui dépendent du hasard.

## 2. **Terminologie** :

- **Hasard :** Evénement dont on ne peut expliquer l'apparition, et que l'on ne peut prévoir , l'origine du mot hasard c'est un mot arabe "el-zahr" qui signifie le dé et la chance.
- **Jeu de hasard :** Un jeu de hasard est un jeu dont le déroulement est partiellement ou totalement soumis à la chance (dés, cartes, roulettes, …ect.)
- **Dé :** est un objet, généralement de petite taille et de forme cubique, qui permet de tirer aléatoirement un nombre ou un symbole parmi plusieurs possibilités.
- **Pièce de monnaie ( Sou ) :** est un morceau de matériau solide, habituellement un métal, ayant la forme d'un disque, et la plupart du temps délivré par le gouvernement, les pièces de monnaie sont utilisées comme argent dans des transactions de toutes sortes.
- **Urne :** est un récipient, dans l'antiquité un grand vase, dont l'usage peut fortement varier, impliquant une modification de sa forme.

| Dé | Pièce de monnaie | Urne |
|---|---|---|
|  |  |  |

## 3. **Définitions préliminaires** :

La théorie des probabilités utilise un langage emprunte à la théorie des ensembles. Il sera nécessaire de définir les éléments de ce langage avant d'entreprendre notre étude sur les probabilités.

- **Probabilité :** l'étude des phénomènes aléatoires ou non déterministe, chaque phénomène étudié, la probabilité définit un modèle mathématique en attribuant des valeurs aux évènements associés à une expérience.
- **Espace probabilisable :** Un espace probabilisable est un couple $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ formé de l'univers $\boldsymbol{\Omega}$ et d'une tribu des évènements $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ sur $\boldsymbol{\Omega}$.
- **Espace probabilisé (Espace de probabilité) :** Un espace probabilisé ou espace de probabilité est la donnée d'une probabilité à tout événement. Formellement, c'est un triplet $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{P})$ formé de l'univers $\boldsymbol{\Omega}$, d'une tribu des évènements $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ sur $\boldsymbol{\Omega}$ et d'une mesure **P** sur cette tribu.
- **Tribu des évènements :** Une tribu des évènements c'est l'ensemble des parties de l'univers $\boldsymbol{\Omega}$, c'est-à-dire l'ensemble des évènements.
- **Expérience aléatoire :** une expérience aléatoire est un processus dont le résultat est incertain, une expérience qui possède les deux propriétés suivantes :
  - on ne peut pas prévoir avec certitude les résultats de l'expérience.
  - on peut décrire avant toute expérimentation l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.
- **Univers ( Ensemble fondamental ) :** L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire, et est noté $\boldsymbol{\Omega}$.
- **Evènement :** un sous-ensemble de l'univers $\Omega$, et est noté **A**, **B**, **C**, …. **A1**,**A2**, **A3** …etc.
- **Evènement impossible :** l'évènement impossible est l'ensemble vide.
- **Evènement certain :** l'évènement certain est l'univers $\boldsymbol{\Omega}$.
- **Evènement contraire** : on appelle évènement contraire de **A** par apport à $\boldsymbol{\Omega}$, noté $\bar{\mathbf{A}}$, le sous-ensemble de $\boldsymbol{\Omega}$ constitué de tous les éléments qui n'appartiennent pas à **A**.
- **Evènement élémentaire** : on appelle événement élémentaire un sous-ensemble de l'univers constitué d'un seul élément.
- **Incompatibilité** : deux évènements **A** et **B** sont dits incompatible si la réalisation de l'un exclue celle de l'autre, c'est-à-dire $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \emptyset$
- **Indépendance** : deux évènements **A** et **B** sont dits indépendant si et seulement si $\boldsymbol{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}).\mathbf{P}(\mathbf{B})$

**Exemples :**

**Exemple (01) :** [Univers]

Déterminez l’univers des expériences suivantes :

1. Le lancement d’un dé.
2. Le lancement d’une pièce de monnaie.
3. Le tirage d’une boule d’une urne qui contient 4 boules numérotées 1, 2, 3 et 4.
4. Le tirage d’une boule d’une urne qui contient 10 boules dont 5 rouges et le reste blanches.

**Exemple (02) :** [Evènements]

On lance un dé une seule fois, déterminez les évènements suivants :

1. A : Obtenir le nombre 0.
2. B : Obtenir un nombre pair.
3. C : Obtenir un nombre impair.
4. D : Obtenir un nombre supérieur à 3.
5. E : Obtenir un nombre inférieur à 2.
6. F : Obtenir un nombre supérieur à 0.

**Exemple (03) :** [Evènements]

On lance une pièce de monnaie et ensuite on lance un dé, décrire en extension

1. l'univers associe à l’expérience aléatoire.

2. les évènements suivants :

**A**: obtenir face avec la pièce de monnaie et un nombre pair avec le dé.

**B**: obtenir un nombre supérieur à **3** avec le dé.

**Exemple (04) :** [Evènement impossible, certain et élémentaire]

On lance une paire de dés, soit les évènements :
**A** : la somme des points est supérieure à **15**.
**B** : la somme des points est inferieure à **13**.
**C** : la somme des points est égale à **2**.
Décrire chacun des évènements.

**Exemple (05) :** [Evènement contraire]

On lance un dé, soit l’évènement :
**A** : le nombre est pair.
Décrire l’évènement **A** et l’évènement contraire $\overline{\mathbf{A}}$.

**Exemple (06) :** [Evènement contraire]

Lors d'un contrôle sanguin, on s'intéresse au groupe sanguin et au facteur rhésus d'un individu :

1. Déterminez l'univers $\mathbf{\Omega}$.
2. Soit l'évènement **A** : " l'individu est du rhésus positif ", Décrire l'évènement **A** et l'évènement contraire $\overline{\mathbf{A}}$.

**Exemple (07) :** [Incompatibilité]

On lance une pièce de monnaie **2** fois, soit $\mathbf{A} = \{\boldsymbol{PP}, \boldsymbol{FF}\}$ et $\mathbf{B} = \{\boldsymbol{FP}, \boldsymbol{PF}\}$, les évènement **A** et **B** sont-il incompatibles ?

## 4. La probabilité et les ensembles :

Les résultats de la théorie des ensembles peuvent être interprétés sous forme d'évènement en théorie des probabilités.

| Ensembles | Evènements |
|---|---|
| $\mathbf{A}$ | L'évènement **A** est réalisé |
| $\overline{\mathbf{A}}$ | L'évènement **A** n'est pas réalisé |
| $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ | L'évènement **A** ou l'évènement **B** est réalisé |
| $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ | L'évènement **A** et l'évènement **B** sont réalisés |
| $\emptyset$ | L'évènement est impossible |
| $\mathbf{\Omega}$ | L'évènement est certain |
| $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$ | L'évènement **A** et l'évènement **B** sont incompatibles |
| $\mathbf{A} \triangle \mathbf{B}$ | Un des évènements seulement se réalise |

| Notation | Théorie des ensembles | Théorie probabiliste |
|---|---|---|
| $\mathbf{A}$ | Sous-ensemble de $\mathbf{\Omega}$ | Evènement |
| $\overline{\mathbf{A}}$ | Complément de **A** | Evènement contraire |
| $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ | La réunion de **A** et **B** | **A** ou **B** |
| $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ | L'intersection de **A** et **B** | **A** et **B** |
| $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ | **A** inclus dans **B** | **A** implique **B** |
| $\emptyset$ | Ensemble vide | Evènement impossible |
| $\boldsymbol{\omega}$ | Elément de $\mathbf{\Omega}$ | Evènement élémentaire |
| $\mathbf{\Omega}$ | Univers | Evènement certain |
| $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$ | A et B sont disjoints | **A** et **B** sont incompatibles |

## 5. **Opérations sur les évènements** :

Si l'on considère simultanément la réalisation de deux évènements **A** et **B**, il est possible d'effectuer des opérations sur ces évènements.

- **L'intersection** : on appelle intersection des deux évènements **A** et **B** l'évènement qui est réalisé si et seulement si **A** et **B** le sont. Il est donc constitué des éventualités appartenant à la fois à **A** et **B**. C'est un évènement noté $\mathbf{A \cap B}$.
- **L'union** : on appelle union des deux évènements **A** et **B** l'évènement qui est réalisé si et seulement si **A** ou **B** est réalisé. Il est donc constitué des éventualités appartenant à **A** ou **B**. C'est un évènement noté $\mathbf{A \cup B}$.

  ***Remarque :*** *il faut distinguer entre le "ou inclusif" et le "ou exclusif", le "ou" utilisé dans notre cours c'est le "ou inclusif"*
- **L'inclusion** : Un évènement **A** entraîne un évènement **B** si la réalisation de **A** implique celle de **B**. On dit que l'évènement **A** est inclus dans l'évènement **B**, et on note $\mathbf{A \subset B}$

**Exemple (08) :** [Opérations sur les évènements]

On lance une pièce de monnaie et ensuite on lance un dé, Soit les évènements suivants :
**A** : obtenir pile avec la pièce de monnaie et un nombre impair avec le dé.
**B** : obtenir un nombre inférieur ou égale à 5 avec le dé.

Décrire l'univers $\mathbf{\Omega}$ et les évènements : **A**, **B**, $\mathbf{A \cap B}$, $\mathbf{A \cup B}$, est ce que l'évènement **A** est inclus dans l'évènement **B** ?

**Exemple (09) :** [Opérations sur les évènements]

On jette un dé et on observe le résultat obtenu, soient **A**, **B** et **C** les évènements correspondant respectivement à l'apparition d'un nombre pair, impair et d'un nombre premier.
Décrire l'univers $\mathbf{\Omega}$ et les évènements : **A**, **B**, **C**, $\mathbf{A \cup C}$, $\mathbf{B \cap C}$, $\mathbf{\bar{C}}$

## 6. **Règles sur les évènements** :

Soit les évènements $A, B, C \subseteq \Omega$

1. $\bar{\bar{A}} = A$
2. $\overline{\Omega} = \emptyset$
3. $\overline{\emptyset} = \Omega$
4. $A \cup \Omega = \Omega$
5. $A \cap \Omega = \mathrm{A}$
6. $A \cup \emptyset = \mathrm{A}$
7. $A \cap \emptyset = \emptyset$
8. $A \cup \overline{\mathrm{A}} = \Omega$
9. $A \cap \overline{\mathrm{A}} = \emptyset$
10. $\overline{A \cap B} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$ (règle de Morgan)
11. $\overline{A \cup B} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$ (règle de Morgan)
12. $A \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$
13. $A \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$
14. $(A \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C} = \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$
15. $(A \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C} = \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$
16. $A \cup (B \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$
17. $A \cap (B \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$
18. $A - \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$ (utilisez le diagramme de Venn pour comprendre cette règle)
19. $B - \mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$ (utilisez le diagramme de Venn pour comprendre cette règle)

**Exemple (10) :** [Règles sur les évènements]

On lance une pièce de monnaie 3 fois, soit les deux évènements suivants :

- $A = \{PFP, PPP, FPF, FPP\}$
- $B = \{PPP, FFF, PPF, FPP\}$

Décrire l’univers et les évènements suivants :

- $A \cap B$
- $A \cup B$
- $\bar{A}$
- $\bar{B}$
- $\overline{A \cup B}$
- $A \cap \bar{B}$
- $\bar{A} \cap B$
- $\bar{A} \cap \bar{B}$

## 7. **Calcul des probabilités** :

La probabilité est le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{Nombre de cas favorables}}{\textbf{Nombre de cas possibes}} = \frac{\mathbf{card(A)}}{\mathbf{card(\Omega)}}$$

**Exemples (11) :** [Calcul des probabilités]

On lance un dé une seule fois, calculez la probabilité des évènements suivants :

1. A : Obtenir le nombre 0.
2. B : Obtenir un nombre pair.
3. C : Obtenir un nombre impair.
4. D : Obtenir un nombre supérieur à 3.
5. E : Obtenir un nombre inférieur à 2.
6. F : Obtenir un nombre supérieur à 0.

**Exemple (12) :** [Calcul des probabilités]

On lance une pièce de monnaie et ensuite on lance un dé, Calculez la probabilité de **A** et **B**
**A** : obtenir face avec la pièce de monnaie et un nombre pair avec le dé.
**B** : obtenir un nombre supérieur à **3** avec le dé.

**Exemple (13) :** [Calcul des probabilités]

On lance deux dés, un rouge et un blanc. Il y a **36** évènements possibles équiprobables. Chaque paire aura donc une probabilité d'apparition de **1/36** (**1** cas favorable sur **36** cas possibles). On notera chaque issue par la paire ***(r , b)*** ou ***r*** indiquera le résultat du dé rouge et ***b*** celui du dé blanc.
Complétez le tableau suivant :

| **Description de l'évènement** | **Evènement** | **Probabilité** |
|---|---|---|
| A : la somme des deux dés est égale à 3 | $A =$ | $P(A) =$ |
| B : la somme des deux dés est égale à 6 | $B =$ | $P$ |
| C : le dé rouge montre un 1 | $C =$ | $P$ |
| D : la somme des deux dés est inférieure à 7 et est un nombre premier | $D =$ | $P$ |

## 8. **Axiomes de calcul des probabilités** :

- Pour chaque évènement A, $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $Si\ A \subset B\ alors\ P(A) \leq P(B)$
- $si\ A \cap B \neq 0\ alors\ P(C_A B) = P(A) - P(A \cap B)$ (*utilisez le diagramme de Venn pour bien comprendre ce théorème*)
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**Exemple (14) :** [Axiomes de calcul des probabilités]

**A** et **B** et $\boldsymbol{A \cup B}$ sont trois évènements de probabilités **0,4** ; **0,5** et **0,6** respectivement

Calculez les probabilités des évènements suivants :

1. $\bar{A}$
2. $\bar{B}$
3. $A \cap B$
4. $\bar{A} \cap B$
5. $A \cap \bar{B}$
6. $\bar{A} \cup B$
7. $A \cup \bar{B}$
8. $\bar{A} \cap \bar{B}$
9. $\bar{A} \cup \bar{B}$

## 9. **Formules de calcul des probabilités** :

| Intitulé | Notation | Formule |
|---|---|---|
| Calcul de probabilité | $\mathrm{P(A)}$ | $\frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibes}} = \frac{\mathrm{card(A)}}{\mathrm{card}(\Omega)}$ |
| Probabilité de l'évènement contraire | $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}})$ | $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)}$ |
| Probabilité de l'union | $\mathrm{P(A \cup B)}$ | $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ |