ECOLE PREPARATOIRE EN SCIENCES ECONOMIQUES, COMMERCIALES ET SCIENCES DE GESTION

Niveau : $1^{ère}$ Année
Sections : 1 et 2
Année Académique : 2011/2012

Module : Probabilités 1
Enseignant : KHERRI Abdenacer
Site web : www.proba-ep.jimdo.com

Support pédagogique de cours :
Cours N° 02
" L'analyse combinatoire "

Plan du cours :

1. **Introduction** :

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets. Elle fournit des méthodes de dénombrements particulièrement utiles en théorie des probabilités. Les probabilités utilisent constamment les formules de l'analyse combinatoire.

2. **Définition de l'analyse combinatoire** :

L'analyse combinatoire est un ensemble de techniques et méthodes qui permettent de dénombrer les différentes dispositions que l'on peut former à partir des éléments d'un ensemble fini.

3. **Dénombrement** :

Le dénombrement est la détermination du nombre d'éléments d'un ensemble. Il s'obtient en général par un comptage ou par un calcul de son cardinal à l'aide de l'analyse combinatoire.

3.1. **La notion factorielle :**

La factorielle d'un entier naturel ***n***, notée ***n!*** ce qui se lit " ***factorielle n*** ", est le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à ***n***, la factorielle joue un rôle important en analyse combinatoire.

Soit ***n*** un entier naturel, sa factorielle est formellement définie par :

$$\boldsymbol{n}! = \prod_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1} \times \boldsymbol{2} \times \boldsymbol{3} \times \dots \times (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{2}) \times (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}) \times \boldsymbol{n}$$

Avec : $\boldsymbol{0}! = \boldsymbol{1}$

Exemples :

1. Calculer 4!
2. Démontrer que $6! \times 7! = 10!$ (sans calculer 10!).
3. Simplifier $\frac{(n+1)!}{n!}$
4. Calculer 5!
5. Calculer $\frac{6!}{5!}$

3.2. **Cardinale d'un ensemble :**

Le cardinale d'un ensemble est le nombre d'éléments qui composent cet ensemble, on note **card (E)**, **|E|**, **#E**.

3.3. **Le principe de l'addition :**

Si **A** et **B** sont deux ensembles finis et disjoints, alors l'ensemble $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ est un ensemble fini de cardinale : $\boldsymbol{card}\ (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{card}\ (\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{card}\ (\boldsymbol{B})$.

Si **A** et **B** sont deux ensembles finis, alors l'ensemble $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ est un ensemble fini de cardinale : $\boldsymbol{card}\ (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{card}\ (\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{card}\ (\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{card}\ (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$.

3.4. <u>Le principe de multiplication</u> :

Si une situation comporte $\boldsymbol{p}$ étapes offrant respectivement $\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}, \ldots, \boldsymbol{n_p}$ possibilités, alors le nombre total des issus est : $\boldsymbol{n_1} \text{ x } \boldsymbol{n_2} \text{ x } \ldots \text{ x } \boldsymbol{n_p}$

Le produit cartésien de p ensembles $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_p}$ noté $\boldsymbol{A_1} \text{ x } \boldsymbol{A_2} \text{ x } \ldots \text{ x } \boldsymbol{A_p}$ représente l'ensemble des p-uplets ($\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_p}$) où $\boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{A_2}$ et $\boldsymbol{x_p} \in \boldsymbol{A_p}$

Si $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_p}$ sont p ensembles finis, alors :

$$\boldsymbol{card}\left(\boldsymbol{A_1} \times \boldsymbol{A_2} \times \ldots \times \boldsymbol{A_p}\right) = \boldsymbol{card}(\boldsymbol{A_1}) \times \boldsymbol{card}(\boldsymbol{A_2}) \times \ldots \times \boldsymbol{card}\left(\boldsymbol{A_p}\right)$$

3.5. <u>Le p-uplet</u> :

Si $\boldsymbol{p} \in \mathbb{N}$, et **A** un ensemble fini, p-uplet (p-liste) est une liste ordonnée de $\boldsymbol{p}$ éléments appelés composante de p-uplet.

1-uplet est un *singleton*, 2-uplet est un *couple*, 3-uplet est un *triplet*, …etc.

Si **A** est un ensemble de cardinale fini $\boldsymbol{n}$, le cardinale de l'ensemble $\boldsymbol{A^n}$ des p-uplets de **A** est $\boldsymbol{n^p}$.

<u>Exemples</u> : [Dénombrement]

<u>Exemple (01)</u> : [Principe de l'addition]

Dans une association regroupant **85** personnes, **62** font du badminton, **34** ont choisi le tennis, et **20** ne pratiquent aucun de ces deux sports. Combien de personnes font à la fois du badminton et du tennis ?

<u>Exemple (02)</u> : [Principe de multiplication]

Sur une petite grille de loto sportif, il faut cocher au choix l'une des trois cases **1**, **2** ou **3**, pour chacun des **7** matchs proposés. Combien de grilles peuvent être jouées ?

<u>Exemple (03)</u> : [Principe de multiplication]

Sur une affiche, on veut disposer quatre chiffres suivis de deux carrés colorés, pour chaque carré, neuf couleurs existent. Combien d'affiches différentes peut-on concevoir ?

<u>Exemple (04)</u> : [le p-uplet]

Une valise avec code de 4 chiffres. Combien de possibilités avez-vous de choisir un code ?

4. <u>Arrangement</u> :

Etant donné un ensemble **A** de $\boldsymbol{n}$ éléments, on appelle *arrangement* de $\boldsymbol{p}$ éléments, toute suite ordonnée de $\boldsymbol{p}$ éléments pris parmi $\boldsymbol{n}$ éléments.

Le nombre d'arrangement de $\boldsymbol{p}$ éléments pris parmi $\boldsymbol{n}$ éléments est noté : $\boldsymbol{A_n^p}$

Deux arrangements de $\boldsymbol{p}$ éléments sont donc distincts s'ils diffèrent par la nature des éléments qui les composent ou par leur ordre dans la suite.

<u>Exemples</u> :

1. Une séquence d'**ADN** est constituée d'un enchaînement de **4** nucléotides [**A** (Adénine), **C** (Cytosine), **G** (Guanine) et **T** (Thymine)]. Il existe différents arrangements possibles de deux nucléotides ou dinucléotides avec $\boldsymbol{p = 2}$ et $\boldsymbol{n = 4}$.
2. Le nombre de mots de **5** lettres (avec ou sans signification) formés avec les **26** lettres de l'alphabet correspond au nombre d'arrangements possibles avec $\boldsymbol{p = 5}$ et $\boldsymbol{n = 26}$.
3. Le tiercé dans l'ordre lors d'une course de **20** chevaux constitue un des arrangements possibles avec $\boldsymbol{p = 3}$ et $\boldsymbol{n = 20}$.

Dans les exemples précédents, l'ordre des éléments dans la suite est essentiel. Ainsi pour le deuxième exemple, le mot "**NICHE**" est différent du mot "**CHIEN**". Mais dans les deux premiers exemples, une base ou une lettre de l'alphabet **peut se retrouver plusieurs fois** alors que dans le troisième exemple, les trois chevaux à l'arrivée sont forcément **différents**. Il faut donc distinguer le nombre d'**arrangements avec répétition** et le nombre d'**arrangements sans répétition**.

4.1. <u>Arrangement avec répétition</u> :

Lorsqu'un élément peut être observé **plusieurs fois** dans un arrangement, le nombre d'**arrangement avec répétition de** $\boldsymbol{p}$ éléments pris parmi $\boldsymbol{n}$, est alors :

$\boldsymbol{A_n^p = n^p}$ avec $1 \leq p \leq n$

<u>Voici pourquoi</u> :

Pour le premier élément tiré, il existe $\boldsymbol{n}$ manières de ranger l'élément parmi $\boldsymbol{n}$.

Pour le second élément tiré, il existe également $\boldsymbol{n}$ possibilités d'arrangements car le premier élément fait de nouveau parti des $\boldsymbol{n}$ éléments (On parle de tirage avec remise).

Ainsi pour les $\boldsymbol{p}$ éléments tirés, il y aura ***n* x *n* x *n* x … x *n* *(p fois)*** arrangement possibles, soit :

$\boldsymbol{A_n^p = n \times n \times n \times \ldots \times n = n^p}$

<u>Exemples</u> :

<u>Exemple (01)</u> : Avec les **4** nucléotides de la séquence d'ADN (**A, T, C, G**). Combien peut-on former de dénucléotides (on fait l'hypothèse qu'une base peut être observée plusieurs fois dans la séquence) ?

Exemple (02) : Une télévision privée décide d'opter pour le système de « programmes à péage » en utilisant des décodeurs commandés par des codes à huit chiffres.
Donnez le nombre d'abonnés potentiels.

Exemple (03) : Soit un cadenas dit "à secret" comportant trois tambours identiques, chaque tambour porte les chiffres 0, 1, ... , 9. Combien de nombres de trois chiffres peut-on former sur un tel cadenas ?

4.2. Arrangement sans répétition :

Lorsque chaque élément ne peut être observé qu'une seule fois dans un arrangement, le nombre d'arrangements sans répétition de ***p*** éléments pris parmi ***n*** est alors :

$\boldsymbol{A_n^p} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!}$ avec $1 \leq p \leq n$

Voici pourquoi :
Pour le premier élément tiré, il existe ***n*** manières de ranger l'élément parmi ***n***.
Pour le second élément tiré, il n'existe plus que ***n-1*** possibilités d'arrangements car le premier élément ne peut plus être pris en compte (On parle de tirage sans remise).
Ainsi pou les ***p*** éléments tirés, il y aura ***n* x *(n-1)* x *(n-2)* x … x *(n-p+1)* *(p fois)*** arrangement possibles, de plus : $\boldsymbol{n}\ \mathbf{x}\ (\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\ \mathbf{x}\ (\boldsymbol{n}-\mathbf{2})\ \mathbf{x}\ \dots\ \mathbf{x}\ (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}+\mathbf{1}) \times \frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})\times\ldots\times\mathbf{2}\times\mathbf{1}}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})\times\ldots\times\mathbf{2}\times\mathbf{1}}$

Donc $\boldsymbol{A_n^p} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!}$

Exemples :

Exemple (01) : Avec les **4** nucléotides de la séquence d'ADN (**A, T, C, G**). Combien peut-on former de dénucléotides (on fait l'hypothèse qu'une base n'est observée qu'une seule fois dans la séquence) ?

Exemple (02) : Une télévision privée décide d'opter pour le système de « programmes à péage » en utilisant des décodeurs commandés par des codes à huit chiffres.
Donnez le nombre d'abonnés potentiels avec des codes composés de chiffres différents.

Exemple (03) : Calculez le nombre de tiercés possibles lorsque **20** chevaux prennent le départ.

Utilisation de la calculatrice pour le calcul des arrangements (sans répétition)

1. Veuillez saisir la valeur de ***n***.
2. Mettez la calculatrice en 2ème fonction.
3. Appuyez sur la touche ***nPr***.
4. Saisir la valeur de ***p***.
5. Appuyez sur la touche = pour obtenir le résultat.

5. <u>Permutation</u> :

Etant donné un ensemble **A** de ***n*** éléments, on appelle *permutation*, toute suite ordonnée de ***n*** éléments.

Par exemple : soit $A = \{a, b, c\}$ les permutations possibles pour cet ensemble sont : $\{a, b, c\}; \{a, c, b\}; \{b, a, c\}; \{b, c, a\}; \{c, a, b\}; \{c, b, a\}$

5.1. <u>Permutation sans répétition</u> :

On appelle *permutation sans répétition*, toute suite ordonnée de ***n*** éléments distincts.

Le nombre des permutations de ***n*** éléments est noté : $\boldsymbol{P_n = n!}$

Remarque : La permutation de ***n*** éléments constitue un cas particulier d'arrangement sans répétition de ***p*** éléments pris parmi ***n*** lorsque ***p = n***.

$$\boldsymbol{A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!}$$

<u>Exemples</u> :

<u>Exemple (01)</u> : Quel est le nombre de manière de placer **8** convives autour d'une table ?

<u>Exemple (02)</u> : Combien peut-on composer de mots avec les lettres du mot **MATH** (avec ou sans signification) ?

<u>Exemple (03)</u> : Combien peut-on composer de mots avec les lettres du mot **RECTANGLE** (avec ou sans signification) ?

Utilisation de la calculatrice pour le calcul des permutations (sans répétition)

1. Veuillez saisir la valeur de ***n***.
2. Mettez la calculatrice en 2ème fonction.
3. Appuyez sur la touche ***nPr***.
4. Saisir la valeur de ***p = n***.
5. Appuyez sur la touche = pour obtenir le résultat.

5.2. <u>Permutation avec répétition</u> :

Dans le cas ou il existerait plusieurs répétition $\boldsymbol{k}$ d'un même élément parmi les $\boldsymbol{n}$ éléments, le nombre des permutations possibles des $\boldsymbol{n}$ éléments doit être rapporté au nombre des permutations des $\boldsymbol{k}$ éléments identiques.

Le nombre des permutations possibles de $\boldsymbol{n}$ éléments est alors : $\boldsymbol{P_n = \frac{n!}{k!}}$

<u>Exemples</u> :

<u>Exemple (01)</u> : Combien peut-on composer de mots avec les lettres du mot **RECTANGLE** (avec ou sans signification) ?

<u>Exemple (02)</u> : Combien peut-on composer de mots avec les lettres du mot **CERCLE** (avec ou sans signification) ?

<u>Exemple (03)</u> : Combien peut-on composer de mots avec les lettres du mot **CALCULATRICE** (avec ou sans signification) ?

6. <u>Combinaison</u> :

Une combinaison est une collection de $\boldsymbol{p}$ éléments pris simultanément parmi $\boldsymbol{n}$ éléments, donc sans tenir compte de l'ordre d'apparition.

6.1. <u>Combinaison sans répétition</u> :

Etant donné un ensemble **A** de $\boldsymbol{n}$ éléments, on appelle *combinaison sans répétition*, tout ensemble de $\boldsymbol{p}$ éléments pris parmi $\boldsymbol{n}$ éléments sans répétition.

Le nombre des combinaisons de $\boldsymbol{p}$ éléments pris parmi $\boldsymbol{n}$ est noté : $\boldsymbol{C_n^p}$ **ou** $\boldsymbol{\binom{n}{p}}$

$$\boldsymbol{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}} \quad \text{avec} \quad 1 \leq p \leq n$$

<u>Exemples</u> :

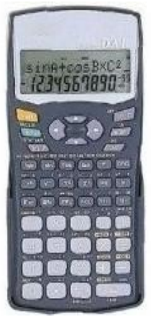
<u>Exemple (01)</u> : Avec les **4** nucléotides de la séquence d'ADN (**A, T, C, G**). Combien peut-on former de dénucléotides sans tenir compte de l'ordre des bases dans la séquence (on fait l'hypothèse qu'une base n'est observée qu'une seule fois dans la séquence) ?

<u>Exemple (02)</u> : Le premier test de probabilités à l'école prépa est organisé en lots de **3** sujets tirés au sort parmi **20** sujets portant sur ce cours. L'étudiant doit traiter un des sujets de son choix.

Combien de test différent peut-on organiser ?

<u>Exemple (03)</u> : Dix personnes se présentent à la médecine du travail pour passer la visite annuelle. Deux médecins les reçoivent. Le premier verra **5** personnes et le deuxième **5**.

Combien de façons différentes les dix personnes peuvent-elle être réparties entre chaque médecin ?



Utilisation de la calculatrice pour le calcul des combinaisons (sans répétition)

1. Veuillez saisir la valeur de ***n***.
2. Appuyez sur la touche ***nCr***.
3. Saisir la valeur de ***p***.
4. Appuyez sur la touche = pour obtenir le résultat.

6.2. <u>Combinaison avec répétition</u> :

Le nombre des *combinaisons avec répétition* de ***p*** éléments pris parmi ***n*** est : $\boldsymbol{C_n^p} = \frac{(\boldsymbol{n+p-1})!}{\boldsymbol{p}!(\boldsymbol{n-1})!}$

<u>Exemples</u> :

<u>Exemple (01)</u> : Avec les **4** nucléotides de la séquence d'ADN (**A, T, C, G**). Combien peut-on former de dénucléotides sans tenir compte de l'ordre des bases dans la séquence (on fait l'hypothèse qu'une base peut être observée plusieurs fois dans la séquence) ?

<u>Exemple (02)</u> : Combien peut-on construire de sous-ensemble de **5** éléments pris parmi les **8** éléments de l'ensemble mère, si ne le tient pas compte à l'ordre et que l'on autorise les répétitions ?

<u>Exemple (03)</u> :

Combien y a-t-il de pièces dans un jeu de dominos ?

7. <u>Triangle de Pascal et Binôme de Newton</u> :

7.1. <u>Triangle de Pascal</u> :

Le triangle de Pascal, est une présentation des coefficients binomiaux dans un triangle. Il fut nommé ainsi en l'honneur du mathématicien français ***Blaise Pascal***.

							1							
						1		**1**						
					1		**2**		**1**					
				1		**3**		**3**		**1**				
			1		**4**		**6**		**4**		**1**			
		1		**5**		**10**		**10**		**5**		**1**		
	1		**6**		**15**		**20**		**15**		**6**		**1**	
1		**7**		**21**		**35**		**35**		**21**		**7**		**1**

7.2. <u>Binôme de Newton</u> :

La formule du binôme de Newton correspond à la décomposition des différents termes de la puissance $n^{\text{ième}}$ du binôme (a+b).

$$\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p}$$

Elever **(*a*+*b*)** à la puissance ***n*** revient à multiplier ***n*** binômes identiques **(*a*+*b*)**. Le résultat est une somme où chaque élément est le produit de ***n*** facteurs de type ***a*** ou ***b*** choisi chacun dans un binôme différent. Les termes sont ainsi de la forme $\boldsymbol{a^{n-p}b^p}$. Chacun de ces termes est obtenu autant de fois qu'il existe de façons de choisir les ***p*** éléments ***a*** parmi les ***n***, c'est à dire le nombre de combinaisons $\boldsymbol{C_n^p}$.

Compte tenu de la <u>*symétrie*</u> des combinaisons $\boldsymbol{C_n^p}$, la formule du binôme de Newton peut s'écrire :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = \sum_{q=0}^{n} C_n^q a^q b^{n-p}$$

Avec : ***q* = *n*-*p***

Les **coefficients binomiaux,** $\boldsymbol{C_n^p}$ qui sont les coefficients de la formule du binôme de Newton figurent dans de nombreuses formules mathématiques, notamment pour le calcul des probabilités de la **loi binomiale**. Ces coefficients peuvent être obtenus facilement à l'aide du **triangle de Pascal**.

<u>Exemple</u> :

Développez la formule $(a+b)^6$ à l'aide de la formule de Binôme de Newton.